

تعیین جهت گام در تحلیل مرتبه اول قابلیت اعتماد بر مبنای روش‌های ریشه‌یابی چند مرحله‌ای

مهرشاد قربانزاده^۱، پیمان همایی^۲ و محسن شهروزی^۳

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران، ایمیل (std_mehrshad.ghorbanzadeh@khu.ac.ir)

۲- استادیار، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران، ایمیل (homami@khu.ac.ir)

۳- استادیار، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران، ایمیل (shahruzi@khu.ir)

چکیده

الگوریتم iHLRF از خانواده روش‌های تحلیلی مرتبه اول قابلیت اعتماد (FORM)، یکی از الگوریتم‌های تکراری محبوب جهت تعیین شاخص قابلیت در مسائل قابلیت اعتماد سازه‌ها محسوب می‌گردد که علاوه بر سرعت بالا، دارای سادگی چشمگیری نیز است. با این حال در برخی از موارد مانند نوسانات زیاد تابع حالت حدی در نزدیکی نقطه طراحی که اغلب در توابع حالت حدی با مرتبه غیرخطی بالا رخ می‌دهد، عدم همگرایی در این روش دیده می‌شود. در این مقاله سه تکنیک تعیین جهت گام برای استفاده در روش تحلیل مرتبه اول، با اقتباس از روش‌های ریشه‌یابی دو مرحله‌ای با مرتبه همگرایی بالا نسبت به روش‌های موجود و برای رفع مشکلات همگرایی FORM ارائه شده‌اند. یک مثال عددی با توابع حالت حدی غیرخطی در فضای استاندارد نرمال در این مقاله قرار داده شده است که کارایی و توانمندی روش‌های پیشنهادی و نیز مقایسه عملکردی بین هر روش نسبت به روش دیگر را نمایش می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل قابلیت اعتماد، روش ریشه‌یابی چند مرحله‌ای، اندازه جهت، جهت گام، مرتبه همگرایی، غیرخطی، تابع حالت حدی

مقدمه

حول نقطه طراحی مورد بررسی از گام‌های کلیدی در این روش بوده و نتیجه آن دسترسی به فرآیند تکراری برای رسیدن به پاسخ مسئله است. نخستین بار این روش توسط هاسوفر و لین با مفهوم‌سازی شاخص قابلیت اعتماد برابر است با کوتاهترین فاصله از مبدا تا نقطه قرار گرفته بر روی رویه حالت حدی در فضای استاندارد نرمال، برای حل مسائل با متغیرهای تصمیم‌گیری استاندارد نرمال معرفی گردید [6,7]. سپس توسط راکویتز و فیسلر به فرم جامع برای استفاده در مسائل با متغیرهای غیر نرمال بهبود یافت [8-10]. در روش ارائه شده توسط آن‌ها، بدلیل در نظر گرفتن مقدار واحد برای اندازه جهت، مشکلات عدم همگرایی شدید پدیدار شده که همانند مشکلات موجود در روش‌های ابتدایی ریشه‌یابی نیوتنی بوده است. ژانگ و کورگیان برای رفع این مشکل، انتخاب مناسب اندازه جهت را منوط به کنترل تابع برازندگی در نظر گرفتند [11] که در آن از روش قاعده آرمیو (Armijo rule) بمنظور بهینه‌سازی تابع برازندگی استفاده شده است. با این حال روش FORM

تعیین دقیق احتمال شکست در تحلیل قابلیت احتمال مستلزم انتگرال‌گیری چندگانه با هزینه محاسباتی بالا است. از جمله روش‌های جایگزین انتگرال‌گیری، روش‌های شبیه‌سازی است که بطور مشخص دو روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و شبیه‌سازی اهمیت از این خانواده هستند که هزاران شبیه‌سازی برای تعیین احتمال شکست در آن‌ها نیاز است [1-5] و به همین دلیل در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های تقریبی تکراری جهت تعیین احتمال شکست مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از روش‌های ساده و سریع حل مسائل قابلیت اعتماد مستقل از زمان سازه‌ها، روش تحلیل مرتبه اول قابلیت اعتماد یا به اختصار FORM است. این روش شامل بسط تیلور تابع حالت حدی حول نقطه طراحی جهت یافتن پاسخ مسئله با نام نقطه با بیشترین احتمال است. انتخاب روش مناسب به منظور دست‌یابی به یک خطی‌سازی مناسب

رابطه‌سازی‌های پیشنهادی در بخش‌های آتی نمایش داده شده است. تفاوت اصلی روش‌های پیشنهادی در تقریب ابر صفحه استفاده شده در حل مسئله است که نتیجه آن بدست آمدن مقادیر متفاوت برای جهت گام، بویژه در گام‌های ابتدایی حل مسئله می‌باشد. در بخش دوم ابتدا روش اصلاح شده FORM یا iHLRF بیان می‌شود و نحوه تعیین جهت گام و اندازه جهت، رابطه‌های مورد استفاده و نحوه اصلاح آن‌ها مورد شرح و بررسی قرار خواهد گرفت. در بخش سوم رابطه‌سازی برازش تابع حالت حدی برای روش‌های نام برده شده جهت تعیین جهت گام، در بخش چهارم تعدادی مثال عددی جهت بررسی نحوه عملکرد روش‌های پیشنهادی و در بخش پنجم نتیجه‌گیری نمایش داده می‌شود.

روش اصلاح شده مرتبه اول (iHLRF)

این روش بدنبال یافتن نقطه طراحی با استفاده از روش تکراری است که در آن رابطه بازگشتی جستجوی بهینه بصورت رابطه (۱) بیان می‌شود [11].

$$u_{m+1} = u_m + s_m \cdot d_m \quad (1)$$

که در آن u_m بردار متغیرهای تصادفی در نقطه طراحی، m شماره تکرار گام، s_m مقدار اندازه جهت و d_m بردار جهت گام است. اولین گام در این روش، تلاش برای تعیین جهت گام است و به این دلیل این روش با یک خطی‌سازی از تابع حالت حدی به روش بسط تیلور مرتبه اول حول نقطه طراحی مطابق رابطه (۲) آغاز می‌گردد.

$$G(u) \approx G(u_m) + \nabla G(u_m)^T \cdot (u - u_m) \quad (2)$$

در این برازش، رسیدن به رویه حالت حدی اهمیت دارد که مشخص کننده مرز بین پیروزی و شکست است. به منظور تعیین رویه حالت حدی نیاز است تا رابطه (۲) را برابر صفر قرار داده و در اینصورت رابطه (۲) به معادله یک ابر صفحه تبدیل خواهد شد که در رابطه (۳) نمایش داده شده است.

$$G(u) \approx G(u_m) + \nabla G(u_m)^T \cdot (u - u_m) = 0 \quad (3)$$

بر اساس اصول هندسی، فاصله مبدا تا نزدیکترین نقطه بر روی رویه حالت حدی از قرار دادن مختصات هندسی مبدا در معادله ابر صفحه، تقسیم بر اندازه بردار گرادیان تابع حالت حدی بدست می‌آید که در رابطه (۴) ارائه شده است.

$$\Delta = \frac{G(0) = 0}{\|\nabla G(u_m)\|} = \frac{G(u_m) - \nabla G(u_m)^T \cdot u_m}{\|\nabla G(u_m)\|} \quad (4)$$

با توجه به اینکه مقدار قرینه و نرمال شده بردار گرادیان با نام بردار α شناخته می‌شود، رابطه (۴) را می‌توان بصورت رابطه (۵) بازنویسی نمود.

برای حل تابع حالت حدی با مرتبه بالای غیر خطی بودن و تعداد زیاد متغیرهای تصادفی دارای محدودیت‌هایی بدلیل استفاده از تقریب مرتبه اول یک مرحله‌ای بوسیله بسط تیلور می‌باشد که در برازش خطی تابع حالت حدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش دیگری که برای رفع این محدودیت مطرح شده، روش SORM است که بسط تیلور مرتبه دوم را ضمن نیاز به مشتق‌های مرتبه بالا بکار می‌برد. این مورد برای حالتی که تعداد متغیرهای تصادفی افزایش یابند، فرآیند حل مسئله را با چالش مواجه می‌نماید. رویکرد دیگر محققین جهت بالابردن کارایی روش FORM ارائه برازش‌های جدید برای تابع حالت حدی می‌باشد. بعنوان مثال در مرجع [12] از روش تک متغیره‌سازی تابع برای برازش خطی تابع حالت حدی استفاده شده است. بعنوان راهکار دیگر از روش‌های مبتنی بر لنگرهای آماری متغیرهای تصادفی موجود در تابع حالت حدی، روش تبدیل لنگر سوم و لنگر چهارم می‌توان نام برد که در آن‌ها قبل از شروع حل مسئله با استفاده از اطلاعات آماری متغیرهای تصادفی، تابع حالت حدی از فضای فیزیکی به فضای استاندارد نرمال تبدیل شده و در گام بعدی با استفاده از روش‌های بیان شده در بالا احتمال شکست تعیین می‌گردد [13-15]. در تمامی روش‌های یاد شده، بعد از شروع حل مسئله استفاده از تقریب مرتبه اول بسط تیلور نقش اصلی را ایفا نموده و نحوه همگرایی و کارایی تمامی این روش‌ها به این برازش وابسته است. به این جهت نیاز است تا برازش تابع حالت حدی مورد بازنگری قرار گرفته و استفاده از روش‌های با مرتبه بالای همگرایی و چند مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته شود. روش‌های اصلاح شده تکرار نیوتن، با انواع مراتب همگرایی از جمله روش‌های نوین در علوم مهندسی جهت یافتن ریشه‌های یک معادله غیر خطی هستند که علاوه بر ریشه‌یابی، استفاده از آن‌ها بمنظور برازش تابع نیز امکان پذیر است [16-18]. این برازش تابع در روش FORM بمنظور تعیین فاصله از نقطه طراحی از مبدا در فضای استاندارد نرمال مورد استفاده قرار گرفته و به همگرایی بهتر در حل مسئله کمک می‌نماید. به این منظور نیاز است تا از روش‌های دو مرحله‌ای مانند روش‌های Double-Newton، Chun، و Porta-Pták استفاده شود تا هم‌زمان حجم محاسباتی، افزایش قابل ملاحظه‌ای نداشته و روند همگرایی بویژه در توابع با مرتبه بالای غیر خطی بودن حاصل گردد [19-24]. بواقع ویژگی اصلی این روش‌ها بالا بردن مرتبه همگرایی بوده در صورتیکه مرتبه مشتق‌گیری را در مرتبه یک حفظ می‌نمایند.

در این مقاله سه روش تعیین اندازه جهت برای بهبود روند همگرایی در روش FORM با استفاده از ترکیب این روش با روش‌های همگرایی مرتبه بالا که در ریشه‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه شده اند. این روش‌ها شامل روش‌های Double-Newton، Chun و Porta-Pták هستند که بین آن‌ها روش‌های کلاسیک و نوین ریشه‌یابی مشاهده می‌گردد. تمامی روش‌ها علی‌رغم بالابردن مرتبه همگرایی، مرتبه مشتق‌گیری را افزایش نمی‌دهند که این مورد در

توابع با مرتبه بالای غیرخطی، دارای محدودیت‌هایی است. به این دلیل در بخش سوم سعی شده تا با معرفی روش‌های پیشنهادی در مقابله با این محدودیت‌ها، راهکار مناسبی اتخاذ گردد.

ارائه تکنیک‌های تعیین جهت گام

در این قسمت تعدادی از روش‌های مورد استفاده در ارتباط با ریشه‌یابی توابع که همزمان برای برازش توابع نیز می‌توان از آن‌ها استفاده نمود ارائه شده اند. این روش‌ها از دسته روش‌های دو مرحله‌ای هستند که هدفشان تعیین جهت گام در یافتن نقطه طراحی است و شامل روش‌های Double-Newton، Chun و Porta-Pták هستند. دلیل استفاده از آن‌ها این است که هم‌زمان افزایش قابل ملاحظه حجم محاسباتی رخ ندهد و نیز روند همگرایی بویژه در توابع با مرتبه بالای غیر خطی بودن حاصل گردد [19-24]. خروجی این روش‌ها دست‌یابی به شکل جدیدی از معادله ابر صفحه استفاده شده در روش iHLRF است و تنها در محاسبه جهت گام (step direction) با این روش تفاوت دارند.

روش اول مبتنی بر تقریب Double-Newton

روش Double-Newton از پیشروترین روش‌های دو مرحله‌ای از خانواده روش‌های ریشه‌یابی نیوتنی است که دارای شکل پیش‌بینی کننده و اصلاح‌کننده بوده و فرم یک بعدی آن برای ریشه‌یابی یک تابع بصورت رابطه (۱۲) است [16,19].

$$z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (12)$$

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

که در آن z_k نقطه پیش‌بینی کننده است که بوسیله تقریب مرتبه اول بسط تیلور حول نقطه طراحی x_k محاسبه شده است و x_k تخمین موجود از ریشه در تکرار k ام و x مقدار تخمین ریشه در مرحله بعدی است. معادله دوم در رابطه (۱۲) را می‌توان با بازنویسی، برای برازش تابع نیز مورد استفاده قرار داد که در رابطه (۱۳) نمایش داده شده است. به این منظور مقدار گرادیان z_k را با گرادیان x_k جایگزین نموده که تفاوت چندانی در نتایج ایجاد نمی‌نماید.

$$f(x) = [f(x_k) + f(z_k)] + \dots \quad (13)$$

$$f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

شکل برداری رابطه (۱۳) برای $G(u)=0$ که در آن u برداری از متغیرهای تصادفی است، بصورت رابطه (۱۴) می‌باشد.

$$\Delta = \frac{G(0)=0}{\|\nabla G(u_m)\|} = \frac{G(u_m) - \nabla G(u_m)^T \cdot u_m}{\|\nabla G(u_m)\|} \quad (5)$$

در صورت خطی بودن تابع حالت حدی، از ضرب رابطه (۵) در بردار α ، پاسخ نهایی بدست خواهد آمد که این پاسخ همان فاصله از مبدا طبق رابطه (۶) خواهد بود.

$$u_{m+1} = \Delta \alpha \quad (6)$$

برای مسائل با تابع حالت حدی غیر خطی، رابطه (۶) پاسخ نهایی نیست اما از آن برای تعیین پاسخ در مرحله بعد استفاده می‌شود. به این ترتیب مقدار جهت گام بصورت رابطه (۷) قابل تعریف است.

$$d_m = u_{m+1} - u_m = \Delta \alpha - u_m = \dots$$

$$\left(\frac{G(0)=0}{\|\nabla G(u_m)\|} \right) \alpha - u_m \quad (7)$$

گام بعدی در این روش تعیین اندازه جهت است که بصورت رابطه (۸) محاسبه می‌شود.

$$s_m = b^k, \quad b = 0.5 \quad (8)$$

که در آن مقدار k عدد صحیح بوده که در صورت برقرار نبودن شرایط همگرایی افزایش می‌یابد. شرط همگرایی استفاده شده برای این روش، استفاده از قاعده آرمیو است که در آن از کنترل تابع برازندگی برای بررسی اندازه جهت استفاده می‌شود. یکی از ساده‌ترین روابط برای تعیین شرط همگرایی، بطور خلاصه بصورت رابطه (۹) است.

$$m(u_{m+1}) \leq m(u_m) \quad (9)$$

که در آن تابع m بیانگر تابع برازندگی است و از رابطه (۱۰) بدست می‌آید.

$$m(u) = 0.5 \|u\|^2 + c \cdot |G(u)| \quad (10)$$

که در آن مقدار c برابر با رابطه (۱۱) است.

$$c = \gamma \cdot \frac{\|u_m\|}{\|\nabla G(u_m)\|} + \eta, \quad \gamma = 2 \ \& \ \eta = 10 \quad (11)$$

در صورت برقرار نبودن رابطه (۹) مقدار اندازه جهت یا s_m در هر گام بوسیله افزایش واحد مقدار k در رابطه (۸) کاهش خواهد یافت و همچنین این امکان وجود دارد تا یک مقدار نهایی جهت کاهش اندازه جهت، بعنوان مثال k بیشینه برابر 6 ، در نظر گرفته شود. در تمامی روش‌های ارائه شده در ادامه، مراحل بیان شده در بالا مورد استفاده قرار خواهد گرفت. تفاوت روش‌های ارائه شده مربوط به رابطه (۵) در تعیین مقدار Δ است. روش استفاده شده در الگوریتم iHLRF، از خانواده روش‌های نیوتنی در مسائل ریشه‌یابی بوده که از گرادیان مرتبه اول در آن استفاده شده و علیرغم ساده بودن و سرعت بالا در بحث همگرایی بویژه برای

$$z_m = u_m + \frac{G(u_m)}{\|\nabla G(u_m)\|} \alpha$$

$$G(u) = 0 = G(u_m) + \dots$$

$$\left[1 + 2 \frac{G(y_z)}{G(u_m)} + \frac{G(z_m)^2}{G(u_m)^2} \right] G(z_m) + \dots \quad (18)$$

$$\nabla G(u_m)^T \cdot (u - u_m)$$

معادله دوم در رابطه (۱۸)، معادله ابر صفحه بدست آمده در این روش است که از آن برای تعیین جهت گام استفاده می‌گردد. به این ترتیب با استفاده از رابطه (۱۸) شکل جدیدی از معادله ابر صفحه و محاسبه Δ ، رابطه (۴)، بدست آمده است و بوسیله آن بردار جهت گام در این روش بصورت رابطه (۱۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$z_m = u_m + \frac{G(u_m)}{\|\nabla G(u_m)\|} \alpha$$

$$d_m = u_{m+1} - u_m = \frac{1}{\|\nabla G(u_m)\|} \dots \quad (19)$$

$$\left[G(u_m) + \left[1 + 2 \frac{G(y_z)}{G(u_m)} + \frac{G(z_m)^2}{G(u_m)^2} \right] G(z_m) - \nabla G(u_m)^T \cdot u_m \right] \alpha - u_m$$

روش سوم مبتنی بر تقریب Porta-Pták

روش سوم یک روش با مرتبه همگرایی ۳ است که از ترکیب روش‌های نیوتن و استفنسن برای تعیین ریشه‌های ساده و حقیقی معادلات غیرخطی یک متغیره معرفی گردیده و روابط آن بصورت رابطه (۲۰) است [21-24].

$$z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (20)$$

$$x_{k+1} = x_k - \left(1 + \frac{f(z_k)}{f(x_k) - \alpha f(z_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

معادله دوم در رابطه (۲۱) می‌تواند با بازنویسی برای برازش تابع مورد استفاده قرار گیرد که در رابطه (۲۱) نمایش داده شده است.

$$f(x) = 0 = (x - x_k) f'(x_k) + \left(\frac{f(x_k)^2}{f(x_k) - f(z_k)} \right) \quad (21)$$

شکل برداری رابطه (۲۱) برای $G(u) = 0$ که در آن u برداری از متغیرهای تصادفی می‌باشد، بصورت رابطه (۲۲) است.

$$z_m = u_m + \frac{G(u_m)}{\|\nabla G(u_m)\|} \alpha$$

$$G(u) = [G(u_m) + bG(z_m)] + \dots \quad (14)$$

$$\nabla G(u_m)^T \cdot (u - u_m) = 0$$

به این ترتیب با استفاده از رابطه (۱۴) شکل جدیدی از معادله ابر صفحه و محاسبه Δ ، رابطه (۴)، بدست آمده و ضریب b در رابطه (۱۴) بمنظور کنترل همگرایی در این روش مورد استفاده قرار گرفته است و مقدار آن با سعی و خطا برابر 0.5- در نظر گرفته شده است. به این ترتیب بردار جهت گام در این روش بصورت رابطه (۱۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$z_m = u_m + \frac{G(u_m)}{\|\nabla G(u_m)\|} \alpha$$

$$d_m = \left(\frac{G(0)}{\|\nabla G(u_m)\|} \right) \alpha - u_m = \dots \quad (15)$$

$$\left[\frac{[G(u_m) + bG(z_m)] - \nabla G(u_m)^T \cdot u_m}{\|\nabla G(u_m)\|} \right] \alpha - u_m$$

روش دوم مبتنی بر تقریب Chun

روش دوم یک روش تکراری دارای مرتبه چهارم همگرایی برای حل معادلات غیرخطی و فرم ریشه‌یابی آن بصورت رابطه (۱۶) است [20].

$$z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \dots \quad (16)$$

معادله دوم در رابطه (۱۶) می‌تواند با بازنویسی برای برازش تابع مورد استفاده قرار گیرد که در رابطه (۱۷) نمایش داده شده است.

$$f(x) = (x - x_k) f'(x_k) + f(x_k) + \dots$$

$$\left[1 + 2 \frac{f(z_k)}{f(x_k)} + \frac{f(z_k)^2}{f(x_k)^2} \right] f(z_k) = 0 \quad (17)$$

شکل برداری رابطه (۱۷) برای $G(u) = 0$ که در آن u برداری از متغیرهای تصادفی است، بصورت رابطه (۱۸) می‌باشد.

جدول ۱: توزیع‌های آماری متغیرهای تصادفی در مثال اول

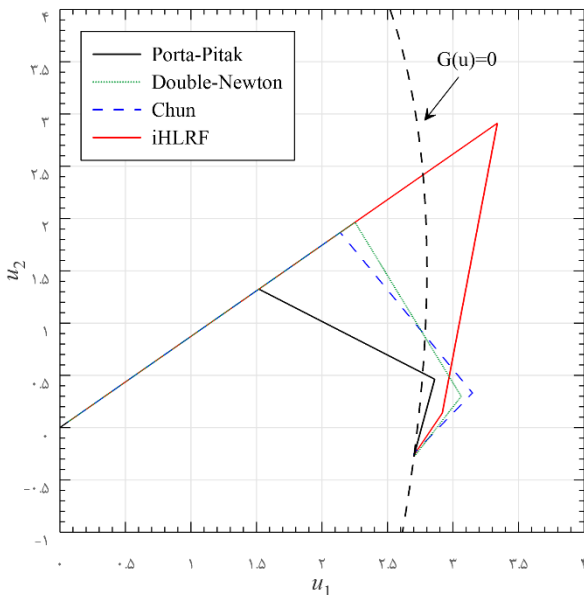
متغیر	توزیع	میانگین	انحراف معیار	چولگی	همبستگی
X_1	نمایی	۱/۰	۱/۰	۲/۰	$\rho_{12} =$
X_2	نمایی	۱/۰	۱/۰	۲/۰	$-۰/۴۰۳۶۵۳$

ضریب همبستگی بین دو متغیر برابر $-۰/۴۰۳۶۵۳$ است. برای حل این مثال ابتدا با استفاده از اطلاعات آماری موجود در جدول ۱ تابع حالت حدی را به روش تبدیل لنگر سوم به تابعی تشکیل شده از متغیرهای استاندارد نرمال غیر همبسته تبدیل کرده که نتیجه آن دستیابی به رابطه (۲۵) است. این مثال در فضای فیزیکی بصورت خطی است که بعد از تبدیل بوسیله روش لنگر سوم به شکل غیر خطی تغییر پیدا کرده و در آن مرتبه دوم توانی و حاصلضرب متغیرهای تصادفی مشاهده می‌شود.

$$G(u) = -1.26u_1 - 1.53u_1^2 + 0.72u_1u_2 - \dots \quad (25)$$

$$1.10u_2 - 0.3u_2^2 + 14.83$$

پاسخ این مثال با استفاده از روش نمونه‌گیری اهمیت برای رابطه (۲۵) با ضریب تغییرات $۰/۰۲$ برای تعداد ۷۸۰۰ شبیه سازی برابر $۲/۷۰۴۰۴$ است. پاسخ نهایی با استفاده از روش‌های شکل ۱ ارائه شده است.



شکل ۱: نتایج روش‌های مختلف بصورت تصویر شده بر اساس رابطه (۲۵)

$$z_m = u_m + \frac{G(u_m)}{\|\nabla G(u_m)\|} \alpha$$

$$G(u) = 0 = \nabla G(u_m)^T (u - u_m) + \dots \quad (22)$$

$$\left(\frac{G(u_m)^2}{G(u_m) - G(z_m)} \right)$$

معادله دوم در رابطه (۲۲)، معادله ابر صفحه بدست آمده در این روش است که از آن برای تعیین جهت گام استفاده می‌گردد. به این ترتیب با استفاده از رابطه (۲۲) شکل جدیدی از معادله ابر صفحه و محاسبه Δ ، رابطه (۴)، بدست آمده است و بوسیله آن بردار جهت گام در این روش بصورت رابطه (۲۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$z_m = u_m + \frac{G(u_m)}{\|\nabla G(u_m)\|} \alpha$$

$$d_m = u_{m+1} - u_m = \dots \quad (23)$$

$$\frac{1}{\|\nabla G(u_m)\|} \left[-\nabla G(u_m)^T (u_m) + \left(\frac{G(u_m)^2}{G(u_m) - G(z_m)} \right) \right] \alpha - u_m$$

شبیه‌سازی عددی

در این بخش یک مثال به منظور بررسی کارایی روش‌های پیشنهادی و نحوه همگرایی آن‌ها ارائه شده است. در ادامه از توابع حالت حدی با مرتبه‌های غیرخطی، تعداد متغیرهای تصادفی، توزیع‌های آماری و ترکیبات متفاوت عبارات ریاضی استفاده شده است که بعد از تبدیل متغیرهای تصادفی به متغیرهای استاندارد نرمال غیر همبسته، این موارد شدت بیشتری نیز خواهند یافت. بدلیل صرف نظر نمودن از تاثیرات تبدیل متغیرهای تصادفی بین فضای فیزیکی و فضای استاندارد نرمال و نیز مشاهده بهتر اثرات روش‌های بیان شده، از روش تبدیل لنگر سوم [13] جهت تبدیل تابع حالت حدی به تابع حالت حدی با متغیرهای استاندارد نرمال غیر همبسته استفاده شده و سپس نتایج نهایی روش‌های ارائه شده با روش‌های iHLRF و نمونه‌گیری اهمیت (Importance Sampling) مورد مقایسه قرار گرفته است [1,11,25]. نقطه شروع، مبدا در فضای استاندارد نرمال است.

این مثال دارای تابع حالت حدی خطی در فضای فیزیکی بصورت رابطه (۲۴) می‌باشد که در آن ضرایبی برای متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده است [13,15,26,27].

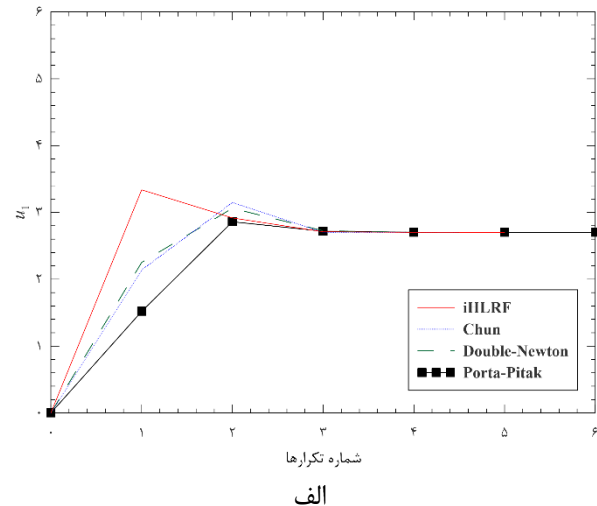
$$G(X) = 18 - 3X_1 - 2X_2 \quad (24)$$

در جدول ۱ مشخصات متغیرهای تصادفی، ماتریس همبستگی و لنگرهای آماری آن‌ها برای استفاده در روش لنگر سوم نمایش داده شده است.

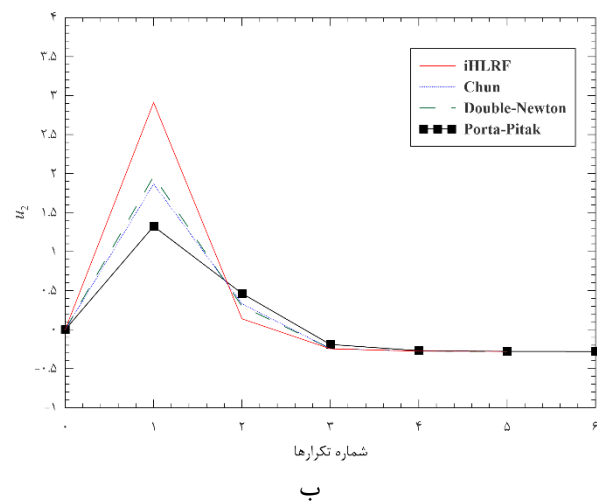
گرفته‌اند. برای اختصار با یک مثال در این مقاله جهت ارزیابی روش‌ها و مقایسه تفاوت‌های آن‌ها با روش iHLRF مطالعه شد. با وجود دستیابی به پاسخ نهایی مشابه برای تمامی روش‌ها، گام‌های طی شده برای این روش‌ها بویژه در گام‌های ابتدایی نسبت به یکدیگر تفاوت داشته‌اند. در مثال ارائه شده مشاهده گردید دو روش Chun و Porta-Piták نسبت به روش iHLRF گام‌های کوتاه‌تر و روند همگرایی ملایم‌تر داشته در حالیکه روش Double-Newton جابجایی‌های بزرگتر را در هر گام محاسباتی نتیجه می‌دهد. با نزدیک شدن پاسخ‌ها به رویه حالت حدی، نوسانات بین روش‌ها بتدریج کاهش یافته و رفتار مشابه بین روش‌ها مشاهده می‌گردد. البته این مورد برای روش Double-Newton نمود کمتری داشته و این روش نسبت به سایر روش‌ها در مسائل با مرتبه غیرخطی بالاتر جابجایی‌های بزرگتر را تا نزدیک شدن بیشتر به رویه حالت حدی ادامه می‌دهد. علیرغم اینکه این روش‌ها به پاسخ نهایی دست یافته‌اند، اما همچنان این پاسخ از نظر دقت، در ردیف روش‌های مرتبه اول قرار می‌گیرد و این مورد بدلیل استفاده از مشتق مرتبه اول در محاسبه جهت گام است و بمنظور بالابردن دقت محاسباتی پاسخ نهایی می‌توان بعد از تعیین پاسخ نهایی بوسیله هریک از این روش‌ها، از روش‌هایی نظیر روش SORM بصورت ترکیبی استفاده نمود. نهایتاً نتایج حاصل، انعطاف‌پذیری بالای این روش‌ها در تحلیل قابلیت اعتماد را نمایش می‌دهند. بعنوان پژوهش آتی، مطالعه سایر روش‌های نوین ریشه‌یابی از جمله روش‌های ۳ و ۴ مرحله‌ای با مرتبه همگرایی ۶ و ۸ پیشنهاد می‌شود.

مراجع

- [1] Rubinstein RY, Kroese DP. Simulation and the Monte Carlo Method: Third Edition. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.; 2016. <https://doi.org/10.1002/9781118631980>.
- [2] Englund S, Rackwitz R. A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. Struct Saf 1993;12:255-76. [https://doi.org/10.1016/0167-4730\(93\)90056-7](https://doi.org/10.1016/0167-4730(93)90056-7).
- [3] Melchers RE. Importance sampling in structural systems. Struct Saf 1989;6:3-10. [https://doi.org/10.1016/0167-4730\(89\)90003-9](https://doi.org/10.1016/0167-4730(89)90003-9).
- [4] Bucher CG. Adaptive sampling - an iterative fast Monte Carlo procedure. Struct Saf 1988;5:119-26. [https://doi.org/10.1016/0167-4730\(88\)90020-3](https://doi.org/10.1016/0167-4730(88)90020-3).
- [5] Wu YT. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis. AIAA J 1994;32:1717-23. <https://doi.org/10.2514/3.12164>.
- [6] Hasofer AM, Lind NC. Exact and Invariant Second-Moment Code Format. ASCE J Eng Mech Div 1974;100:111-21.
- [7] Xiang Y, Pan B, Luo L. A most probable point method for probability distribution construction. Struct Multidiscip Optim 2020;62:2537-54. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02623-2>.
- [8] Rackwitz R, Flessler B. Structural reliability under combined random load sequences. Comput Struct 1978;9:489-94. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(78\)90046-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90046-9).
- [9] Zhou ST, Xiao Q, Zhou JM, Li HG. Improvements of



الف



ب

شکل ۲: نتایج روش‌های مختلف در هر گام. الف: متغیر اول ب: متغیر دوم

با توجه به شکل ۱ مشاهده می‌شود که تمام روش‌ها به پاسخ نهایی رسیده‌اند اما گام‌های طی شده در دست‌یابی به این پاسخ، بویژه در گام‌های ابتدایی با یکدیگر متفاوت هستند. در نخستین گام بعد از شروع، روش iHLRF دارای بزرگترین جابجایی و روش‌های Double-Newton, Chun و Porta-Piták به ترتیب مقدار جابجایی کمتری را داشته‌اند. این به دلیل تفاوت مرتبه همگرایی هر روش نسبت به سایرین است که نتیجه آن در جهت گام و نهایتاً در اندازه گام خود را نشان می‌دهد. بعد از اتمام گام دوم و رسیدن به گام سوم که پاسخ‌ها در محدوده رویه حالت حدی قرار گرفته‌اند، یا عبارت دیگر نزدیک به تابع حالت حدی برابر صفر، روش‌های متفاوت به مقادیر نزدیک به یکدیگر همگرا شده‌اند. مطالب بیان شده در این قسمت و نیز پاسخ هر متغیر تصادفی تا رسیدن به همگرایی برای هر روش در شکل ۲ ارائه شده‌اند.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله سه نوع رابطه‌سازی ریاضی جهت تعیین گام جهت بوسیله روش‌های نوین و کلاسیک ریشه‌یابی دو مرحله‌ای ارائه گردید که بمنظور حل مسائل قابلیت اعتماد دارای پیچیدگی مورد استفاده قرار

- <https://doi.org/10.2307/2316079>.
- [20] Chun C. Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Appl Math Comput* 2008;195:454–9. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.105>.
- [21] Potra F, Pták V. Nondiscrete induction and iterative processes. Number. Boston: Pitman Advanced Pub. Program; 1984.
- [22] Sharma JR. A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations. *Appl Math Comput* 2005;169:242–6. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.10.040>.
- [23] Argyros IK, Hilout S. On the semilocal convergence of damped Newton's method. *Appl Math Comput* 2012;219:2808–24. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.011>.
- [24] Xiaojian Z. Modified Chebyshev-Halley methods free from second derivative. *Appl Math Comput* 2008;203:824–7. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.05.092>.
- [25] Der Kiureghian A. First- and second-order reliability methods. *Eng. Des. Reliab. Handb.*, CRC Press; 2004, p. 14-1-14–24. <https://doi.org/10.1201/9780203483930.ch14>.
- [26] Ditlevsen O, Madsen HO. *Structural Reliability Methods*. vol. 178. Wiley New York; 2005.
- [27] Hong HP, Lind NC. Approximate reliability analysis using normal polynomial and simulation results. *Struct Saf* 1996;18:329–39. [https://doi.org/10.1016/S0167-4730\(96\)00018-5](https://doi.org/10.1016/S0167-4730(96)00018-5).
- Rackwitz-Fiessler Method for Correlated Structural Reliability Analysis. *Int J Comput Methods* 2020;17:1950077. <https://doi.org/10.1142/S0219876219500774>.
- [10] Yang M, Zhang D, Han X. New efficient and robust method for structural reliability analysis and its application in reliability-based design optimization. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2020;366:113018. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113018>.
- [11] Zhang Y, Kiureghian A. Two Improved Algorithms for Reliability Analysis. *Reliab. Optim. Struct. Syst.*, Boston, MA: Springer US; 1995, p. 297–304. https://doi.org/10.1007/978-0-387-34866-7_32.
- [12] Rahman S, Wei D. A univariate approximation at most probable point for higher-order reliability analysis. *Int J Solids Struct* 2006;43:2820–39. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.053>.
- [13] Lu Z-H, Cai C-H, Zhao Y-G. Structural Reliability Analysis Including Correlated Random Variables Based on Third-Moment Transformation. *J Struct Eng* 2017;143:04017067. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0001801](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0001801).
- [14] Zhao Y-G, Ono T. Third-Moment Standardization for Structural Reliability Analysis. *J Struct Eng* 2000;126:724–32. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2000\)126:6\(724\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2000)126:6(724)).
- [15] Lu Z-H, Cai C-H, Zhao Y-G, Leng Y, Dong Y. Normalization of correlated random variables in structural reliability analysis using fourth-moment transformation. *Struct Saf* 2020;82:101888. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2019.101888>.
- [16] Li S, Liu X, Zhang X. A Few Iterative Methods by Using [1,n]-Order Padé Approximation of Function and the Improvements. *Mathematics* 2019;7:55. <https://doi.org/10.3390/math7010055>.
- [17] Ali F, Aslam W, Ali K, Anwar MA, Nadeem A. New Family of Iterative Methods for Solving Nonlinear Models. *Discret Dyn Nat Soc* 2018;2018:1–12. <https://doi.org/10.1155/2018/9619680>.
- [18] Wang X, Qin Y, Qian W, Zhang S, Fan X. A family of Newton type iterative methods for solving nonlinear equations. *Algorithms* 2015;8:786–98. <https://doi.org/10.3390/a8030786>.
- [19] Young DM, Traub JF, Young DM, Traub JF, Young DM, Traub JF. Iterative Methods for the Solution of Equations. *Am Math Mon* 1967;74:346.