

بررسی قابلیت اطمینان از دیدگاه انتخاب شبکه و تأثیر آن بر هزینه محاسباتی برای شبیه‌سازی عددی تشکیل و جدایش قطره با استفاده از روش شبکه بولتزمن

یاسر جعفری^{۱*}، محمد طیبی رهنی^۲، محمدرضا سلیمی^۳، رینهارد میلر^۴

۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، jafarivaser@ae.sharif.edu

۲- استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۳- استادیار، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

۴- استاد، گروه بیوفیزیک ماده نرم، دانشگاه صنعتی دامشتارت، آلمان

چکیده

در این مقاله فرآیند تشکیل و جدایش یک قطره از انتهای نازل با استفاده از روش شبکه بولتزمن و مدل میدان فازی بقایی شبیه‌سازی شده است. ضمن بررسی پیشینه‌ای از تحقیقات بر روی پدیده تشکیل قطره، کاربردهای آن نیز عنوان شده است. همچنین، روابط و معادلات مدل میدان فازی منطبق بر شبکه بولتزمن عنوان شده است. اعداد بی بعد حاکم بر مسئله تشکیل و جدایش قطره معرفی و بررسی شده است. از طرفی، نتایج بررسی حاضر با کارهای قبل مقایسه و نقاط ضعف و قوت آن بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مدل میدان فازی بقایی در روش شبکه بولتزمن از روش‌های مناسب برای شبیه‌سازی مسئله تشکیل و جدایش قطره به حساب می‌آید. جزئیات و هزینه محاسبات تا حدودی به دلخواه و دقت محقق وابسته است. اگر در مسئله‌ای تغییرات کوچک مرز مشترک حائز اهمیت باشد (مانند تشکیل قطرات اقماری)، مدل میدان فازی بقایی در روش شبکه بولتزمن قابلیت آنرا دارد که با صرف هزینه محاسباتی بیشتر این جزئیات را بدست آورد.

واژه‌های کلیدی: روش شبکه بولتزمن، مدل میدان فازی بقایی، اندازه شبکه، هزینه محاسبات، تشکیل و جدایش قطره

مقدمه

بالای فرآیند تشکیل قطره همراه با تغییرات سریع در مرز قطره، محققان را مجبور به استفاده از دوربین‌های سرعت بالا و صرف هزینه تجهیزات گزاف کرده است [۲]. از طرفی، رفتن به سمت حل‌های عددی نیز به دلیل ماهیت فیزیکی مسئله یعنی سرعت بالا همراه با تغییرات سریع در مرز قطره، نیازمند استفاده از روش‌های عددی با دقت بالا و دارای توانایی شبیه‌سازی این مسئله است که این خود هزینه محاسبات را به همراه خواهد داشت. علاوه بر این، مطالعات تجربی مختلف درک ما را از روند تشکیل قطرات توسعه داده و مطالعاتی از این دست در درجه اول به تخمین‌های کلی و نمای بیرونی سیستم تشکیل قطره محدود شده است. در نقطه مقابل، شبیه‌سازی عددی می‌تواند برای تعیین دینامیک سیال در

مطالعه تشکیل قطره بیش از یک قرن است که به عنوان یک موضوع تحقیقاتی فعال باقی مانده است زیرا این موضوع برای تئوریسین‌ها، پژوهشگران محاسباتی و تجربی به یک اندازه چالش برانگیز است. در طول این مدت توسعه مطالعات روی تشکیل قطره به دلیل کاربردهای گسترده و انواع آن محققان زیادی را مجذوب خود کرده است. پدیده تشکیل قطره از نازل یک فرآیند بسیار پیچیده است [۱]. این پیچیدگی خود را در تحقیقات تئوریک، محاسباتی و تجربی به شکل متفاوتی نشان می‌دهد. به‌طور مثال، در مطالعات تجربی به دلیل سرعت

محدودیت‌هایی برای هر دو در این زمینه وجود دارد. در موارد خاصی به نتایج این بسترهای نرم‌افزاری نمی‌توان اعتماد کرد و نیاز به استفاده از سایر روش‌های شبیه‌سازی است.

در سال ۲۰۱۲، چانگ^۷ و همکارانش مطالعه‌ای روی تشکیل قطره از نازل خیس‌شونده انجام دادند [۱۹]. آنها در مطالعات تجربی خود مشاهده کردند که قطره‌هایی که از یک نازل خیس‌شونده تشکیل می‌شوند، در ابتدا به دلیل کشش سطحی، از دیواره‌های خارجی نازل بالا می‌روند. سپس، وزن قطره به تدریج افزایش یافته و در نهایت به دلیل جاذبه سقوط می‌کند. همچنین، آنها با تغییر پارامترهایی مانند اندازه نازل و سرعت جریان سیال، رفتارهای متفاوتی از قطرات را مشاهده کردند.

در سال ۲۰۱۳، درینسن^۸ رساله دکتری خود را تحت عنوان «تشکیل قطره از جت‌های سیال تقارن محوری» در گروه فیزیک سیالات دانشگاه دانشگاه توئنته^۹ به اتمام رساند [۲۰]. وی یک روش عددی تقریب جت باریک ارائه داد. در این روش، یک عبارت سازماندهی برای از بین بردن تکینگی نقطه باریک‌شوندگی^۹ معرفی شده است. مدل منظم جدید ارائه شده توانست پیشروی یک جت را بعد از اولین باریک‌شوندگی با موفقیت شبیه‌سازی کند. همچنین، وی در بخشی از مطالعه خود انقباض سرعت انقباض تار (سیال لزج را تعیین کرده است. سپس، نتایج تجزیه و تحلیل خود را با استفاده از چهار روش مختلف یعنی روش موازنه نیروها، روش شبکه بولتزمن، مدل حجم سیال و نرم‌افزار فلو تری-دی^{۱۰} مدل عددی جدید ارائه شده به دست آورده است.

در سال ۲۰۱۴، لان^{۱۱} و همکارانش تشکیل قطره در میکروکانال را با استفاده از روش مجموع سطوح اصلاح شده شبیه‌سازی کردند [۲۱]. یکی از مشکلات روش مجموع سطوح^{۱۲} در شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی غلبه بر مشکل از بین رفتن جرم غیر فیزیکی است. در این پژوهش با اصلاح انجام شده بر روی این روش اثبات شد که روش جدید می‌تواند مسئله تشکیل قطره را به خوبی شبیه‌سازی کند. همچنین، بر روی پارامتر سرعت سیال خروجی در اندازه تشکیل قطرات و گردش جریان داخل قطره مطالعه انجام شد.

در سال ۲۰۱۵، ژانگ^{۱۳} و همکارانش با استفاده از شبیه‌سازی عددی به مطالعه خواص فیزیکی سیال در تشکیل قطره تحت کنترل به کار رفته در چاپ جوهرافشان پرداختند [۲۲]. آنها از روش حجم سیال^{۱۴} موجود در نرم‌افزار تجاری فلوئنت برای مدل کردن جزئیات فرایند تشکیل قطره استفاده کردند. در این بررسی، تأثیر لزجت و کشش سطحی مایع در فرایند تشکیل مطالعه شده است.

کل فرایند تشکیل قطرات و فراهم کردن دیدی روشن از مجموع شرایط پارامتری به کار رود [۳]. در هر حال، به دلایل گستردگی کاربردهای تشکیل قطره در مسائل صنعتی و روزمره، وجود این پدیده در شاخه‌های علمی مختلف (از شیمی و زیست گرفته تا هوافضا) و وجود چالش‌های فراوان در آن به دلیل فیزیک‌های گوناگون باعث شده است که پژوهش روی تشکیل قطره به صورت یک مسئله همیشه زنده در تحقیقات باقی بماند و سهم قابل توجهی از تحقیقات را به خود اختصاص دهد [۲].

تاریخچه مطالعه فرایند تولید قطره بیش از یک قرن به طول انجامیده است. در طول این مدت توسعه مطالعه روی قطره به دلیل کاربردهای گسترده آن، محققان زیادی از حوزه‌های مختلف علمی مانند مهندسی، علوم پایه و پزشکی را مجذوب خود کرده است [۴]. برخی از این کاربردها عبارتند از: اندازه‌گیری خاصیت سیالات [۲]، چاپ جوهرافشان [۵]، ریزآرایی DNA [۲]، ایجاد میکرو ساختارها [۶]، ساخت بیوسنسورها و سیستم‌های میکرو الکترومکانیک [۷]، چاپ زیستی [۸] و شیمی ترکیبی و کشف دارو [۹].

با پیشرفت تکنولوژی نیاز به شناخت دینامیک و روش‌های کنترل تشکیل قطره از اواسط قرن ۲۰ بیشتر احساس شده و نظر محققان فعال در زمینه مکانیک سیالات و به خصوص جریان‌های چندفازی را به خود جلب کرد [۱۴-۱۰]. در ابتدا، به دلیل نبود امکانات و عدم توسعه روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی تمام مطالعات بر روی این موضوع محدود به مطالعات آزمایشگاهی و معدود حل‌های تحلیلی شد. این مشاهدات به دلیل نبود امکانات کافی مانند دوربین‌های سرعت بالا بسیار محدود بود. از اواسط دهه ۸۰ میلادی با پیشرفت کامپیوترها و روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی، محققان به سمت شبیه‌سازی عددی فرایند تشکیل قطره و ایجاد اطلاعات وسیع در شناخت این پدیده حرکت کردند [۱۷-۱۵]. اطلاعات به دست آمده مطالعات ابتدایی به دلیل تازه بودن موضوع بسیار محدود بوده و شاید در حال حاضر با گسترش علم در این زمینه به نظر ما محدود بیاید اما همین مطالعات پایه‌ای باعث مطالعات پیشرفته عددی و آزمایشگاهی در سال‌های اخیر شده است.

در سال ۲۰۰۵، فاوهینمی^{۱۵} و همکارانش یک مطالعه ترکیبی تجربی و دینامیک سیالات محاسباتی برای دینامیک تشکیل قطره ارائه کردند [۱۸]. آنها شبیه‌سازی عددی خود را در بستر دو نرم‌افزار تجاری سی اف ایکس^{۱۶} و فلو تری-دی^{۱۷} که هر دو از روش حجم سیال^{۱۸} برای مدل کردن جریان چند فازی بهره می‌گیرند، انجام دادند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی این دو نرم‌افزار و مقایسه آن با نتایج تجربی نشان داد که قابلیت‌ها و

9 University of Twente

1 Pinch-off 0
1 Filament 1
1 FLOW3D 2
1 Lan 3
1 Level Set 4
1 Zhang 5
1 Volume of Fluid (VOF) 6

1 Inkjet Printing

2 Microelectromechanical Systems (MEMS)
3 Fawehinmi
4 CFX
5 FLOW-3D
6 Volume of Fluid (VOF)
7 Chang
8 Driessen

جریان‌های مختلف با توجه به نیروهای اینرسی و کششی سطحی اعمال شده در سیال گسسته پیش‌بینی شود.

در سال ۲۰۱۸، لو^۶ و همکارانش به بررسی عددی و آزمایشگاهی تشکیل و جدایش قطره از جت سوزنی توزیع‌کننده میکرو مایع پرداختند [۲۸]. در این مطالعه فرایند جت قطرات به ۵ مرحله به نام‌های جریان برگشتی، رشد، گسترش قطره، شکست و جدایش تقسیم و شبیه‌سازی و اثرات ترکیبی از پارامترهای سیستم مانند فشار، لزجت، ضربه سوزن و قطر نازل تجزیه و تحلیل شده است.

در سال ۲۰۱۹، بیشنوی و سینها^۵ با استفاده از شبیه‌سازی عددی مراحل مختلف تشکیل قطره از انتهای یک لوله موئین را مورد مطالعه قرار دادند [۲۹]. آنها هندسه خود را بصورت تقارن محوری در نظر گرفته و با استفاده از یکی از نرم‌افزارهای تجاری شامل روش حجم سیال شبیه‌سازی خود را انجام دادند. رژیم‌های مختلفی در تشکیل قطره مشاهده شد که با تغییر در بعد لوله موئین و سرعت جریان تغییر می‌کردند.

در سال ۲۰۱۹، سن^۶ و همکارانش پدیده شکل‌گیری قطره از یک حفره ساده و یک نازل منفرد در صفحه غرق در فاز پیوسته ساکن را با شبیه‌سازی عددی مورد بررسی قرار دادند [۳۰]. آنها برای این کار هر دو هندسه مدنظر را تقارن محور در نظر گرفتند. همچنین، برای انجام شبیه‌سازی عددی از نرم‌افزار تجاری کامسول^۷ که از روش میدان فازی^۸ برای مدل‌سازی مرز مشترک بین قطره و محیط پیوسته اطراف بهره می‌برد، استفاده کردند. آنها از این شبیه‌سازی برای تجزیه و تحلیل پارامتری مسئله استفاده کرده تا تأثیر متغیرهای مستقل مختلف بر پدیده تشکیل قطره را دریابند. نتایج نشان می‌دهد که برای شرایط یکسان، قطره‌های شکل گرفته در یک نازل کوچکتر از قطره‌های تشکیل شده در یک حفره ساده هستند و زمان جدا شدن قطره برای یک حفره ساده بیشتر از نازل است. با این حال، ارتفاع جدایش قطره برای یک نازل بیشتر از یک حفره ساده است. آنها روابطی برای تخمین قطر قطره برای هر دو نوع هندسه ارائه کردند.

به تازگی، قربانی^۹ فر از دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات با راهنمایی دکتر طیبی رهنی پژوهش‌های خود برای رساله با عنوان «شبیه‌سازی عددی سه بعدی نوسانات غیرخطی، تشکیل و جدایش قطرات از انتهای یک لوله» را به پایان رسانده و نتایج خود را در قالب مقاله‌های به مجلات معتبر ارسال کرده که یکی از آنها پذیرش شده و بقیه در حال داوری است [۳۱-۳۲]. هدف از این تحقیقات در دو بخش بیان شده است. هدف اول، بررسی نوسانات قطره آویزان و در حال رشد از انتهای یک لوله در نظر گرفته شده است. هدف دوم، استفاده از مدل مرز پخش^۹ و بهره‌گیری از روش شبکه بولتزمن بقایی سه بعدی، شبیه‌سازی عددی مسئله مد نظر

در سال ۲۰۱۶، چاکرابورتی^۱ و همکارانش در یک شبیه‌سازی عددی به بررسی تشکیل قطره تقارن محوری با استفاده از روش ترکیبی مجموع سطوح و حجم سیال^۲ پرداختند [۲۳]. در این بررسی از معادلات ناویر استوکس تقارن محوری استفاده شد. سیال تشکیل‌دهنده قطرات از نوع نیوتنی بود. آنها برای بررسی مشاهده رژیم‌های مختلف تشکیل قطره در عدد آنسرج و باند ثابت، مقدار وبر را افزایش دادند و محدوده این رژیم‌ها را مشخص کردند. همچنین، بحث کافی بر روی محدوده تشکیل قطرات اقماری شد.

در سال ۲۰۱۷، هی^۳ و همکارانش ترشوندگی و کشش سطحی در تشکیل قطره هنگام چاپ جوهرافشان از نوع مدل قطره تحت کنترل تحت تحریک پیزوالکتریک را به صورت عددی شبیه‌سازی کردند [۳]. در این پژوهش، یک مدل سیال دوتایی مبتنی بر شبکه بولتزمن برای چاپ جوهرافشان را تشریح شده است. در این مدل، یک نیروی محرکه وابسته به زمان برای اعمال خروج قطره استفاده می‌شود.

در سال‌های ۱۸-۲۰۱۷، فلاح و طیبی رهنی شبیه‌سازی‌های عددی بر روی تشکیل قطره با استفاده از روش شبکه بولتزمن انجام دادند [۲۶-۲۴]. هندسه در نظر گرفته شده در این مطالعات بصورت میکروکانال تی-شکل معمولی و اصلاح شده و سایر شکل‌های آن بود. از مدل شبه-پتانسیل روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی این جریان چندفازی استفاده شده است. آنها دقت مدل مورد نظر را توسط آزمایش لاپلاس، زاویه تماس قطره و فرآیند تشکیل قطره در یک میکروکانال تی‌شکل معمولی مورد امتحان قرار دادند. آنها در مطالعات خود اثر تغییرات پارامترهای گوناگون از جمله عدد کاپیلاری، نسبت دبی، نسبت پهنای دو فاز و زاویه تماس بین قطره و سطح جامد روی پهنای قطره و فاصله مابین قطرات با جزئیات برای میکروکانال تی‌شکل معمولی بررسی کردند. همچنین، روش شبکه بولتزمن با مدل شبه‌پتانسیل در شبیه‌سازی تشکیل قطره در میکروکانال‌ها، روشی قابل اطمینان خواهد بود.

در سال ۲۰۱۸، نظری به مطالعه آزمایشگاهی تشکیل قطره نیوتنی در فاز پیوسته سیالات مختلف پرداخت [۲۷]. در این پژوهش، تشکیل قطره آب به عنوان یک مایع نیوتنی در توده‌ای از سیالات مختلف مورد بررسی قرار گرفت. یک کد با نرافزار متلب برای پردازش تصاویر از طریق دوربین پر سرعت در آزمایشگاه توسعه داده و از آن برای اندازه‌گیری زاویه تماس قطره و قطر و حجم قطره در مراحل مختلف شکل‌گیری استفاده شده است. مشخص شد که قطره آب وقتی در فاز پیوسته مایع با خصوصیات مختلف شکل می‌گیرد رفتار مشابهی نشان می‌دهد. درحالی‌که این رفتار با تشکیل قطرات آب در فاز پیوسته گاز متفاوت است. علاوه‌براین، در این پژوهش سعی شد تا فرکانس تشکیل قطره در نرخ

6 Sen

7 COMSOL

8 Phase-field

9 Diffusive Interface Modeling

1 Chakraborty

2 Coupled Level Set and Volume of Fluid (CLSVOF) Method

3 He

4 Lu

5 Bishnoi and Sinha

معادلات ناویر ارائه شده است. سپس، نحوه اعمال این مدل در روش شبکه بولتزمن توضیح داده شده است.

معادلات تسخیر مرز مشترک

دو روش شناخته شده برای استخراج روابط وجود دارد که عبارتند از معادله کاهن-هلیارد [۳۷] و معادله آلن-کاهن [۳۸]. برای معادله کاهن-هلیارد، صرف نظر از خاصیت بقای جرم، باید گسسته سازی مشتق مرتبه چهارم انجام گیرد، که توجه ویژه‌ای را می‌طلبد. در حالی که معادله آلن-کاهن فقط شامل گسسته‌سازی مشتق مرتبه دوم است. به طرز جالب توجهی، چپو و لین [۳۹] هر دو مزیت معادلات کان-هلیارد و آلن-کاهن را با هم ترکیب کردند. در مدل بقایی که توسط [۳۶] برای سیستمی حاوی سیال دوجزئی غیرقابل تراکم معرفی شده است، معادله حاکم برای تعقیب جبهه به صورت زیر [۳۴] است:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left[M \left(\nabla \varphi - \frac{4}{W} \varphi (1 - \varphi) \hat{\mathbf{n}} \right) \right], \quad (1)$$

که φ متغیر میدان فاز مرز پخش با مقدار صفر در فاز سبک تر و یک در فاز سنگین تر است، \mathbf{u} بردار سرعت ماکروسکوپی است، t زمان است، W ضخامت رابط است، M تحرک، و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر مرز مشترک است که جهت مثبت آن به سمت فاز سنگین تر باشد. بنابراین:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}, \quad (2)$$

همچنین فرض می‌شود که $\varphi(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{W/2} \right) \right], \quad (3)$$

که در آن مشخصات میدان فاز تعادل در \mathbf{x}_0 واقع شده است و به عنوان یک شرط اولیه برای φ حاصل از به حداقل رساندن انرژی g ; سیستم استفاده می‌شود [۴۰]. ژاکمین [۴۱] برای اعمال زاویه تماس، θ ، در یک مرز جامد، شرایط تر شدن را پیشنهاد کرد. توجه داشته باشید φ_w میدان فاز در دیواره است، و $\hat{\mathbf{n}}_w$ بردار یکه دیوار است، یعنی:

$$\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \nabla \varphi|_{x_w} = \Theta \varphi_w (1 - \varphi_w), \quad (4)$$

$$\Theta = -\sqrt{\frac{2\beta}{\kappa}} \cos \theta,$$

$$\kappa = 3\sigma \frac{W}{2}, \quad (5)$$

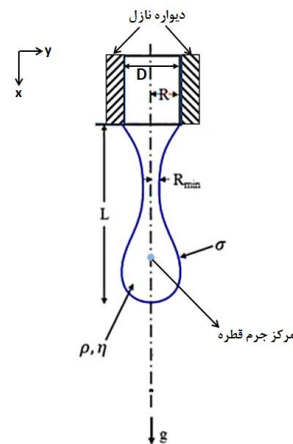
$$\beta = \frac{12\sigma}{W},$$

که در آن کشش سطحی σ کشش سطحی است.

تعریف شده است. از این‌رو، در پژوهش حاضر با توجه به قابلیت مدل میدان فازی بقایی روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان‌های شامل تشکیل و جدایش قطره سعی شده است که از این قابلیت برای بررسی جنبه‌های مختلف این مسئله استفاده شود. بنابراین، ابتدا با بیان روش شبیه‌سازی سعی در اعتبارسنجی آن خواهد شد. همچنین، انواع شبکه انتخابی به لحاظ تعداد مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، نحوه افزایش هزینه محاسبات برحسب افزایش تعداد شبکه و انتخاب شبکه برحسب دقت مورد نیاز محقق بحث و بررسی خواهد شد.

مدلسازی فیزیکی

در این پژوهش، شکل گیری و جدایش یک قطره از انتهای یک نازل یا لوله موئین بصورت دو بعدی شبیه‌سازی خواهد شد. فرض می‌شود که این مایعات هم دما، نیوتنی، غیرقابل تراکم و همسانگرد است. جریان غیردایم است و انتقال جرم بین دو فاز صفر است. در آغاز، فاز سنگین در ناحیه وجود ندارد و رشد قطره با تزریق مایع آغاز می‌شود. ادامه این روند در نهایت منجر به جدا شدن قطره می‌شود. شکل ۱ نمایشی شماتیک از این مدل فیزیکی را نشان می‌دهد.



شکل ۱: شماتیک هندسه مسئله

مدلسازی عددی

در دو گذشته، بسیاری از تحقیقات بر روی دینامیک قطره با استفاده از روش شبکه بولتزمن انجام شده است. در سال‌های ۲۰۱۳ تا ۲۰۱۷، فخاری و همکاران [۳۳-۳۶] یک مدل مناسب برای جریان‌های چند فازی به نام مدل میدان فاز بقایی، که به طور کامل دینامیک قطره را در بر می‌گیرد، ایجاد کردند. در این بخش، ابتدا جهت شناخت درست روش میدان فازی بقایی توضیح مختصری در باره روابط و معادلات تسخیر مرز مشترک و هیدرودینامیکی مورد استفاده در این مدل در حالت حل‌های عددی بر پایه

معادلات هیدرودینامیکی

برای یک جریان چندفازی همدمای تراکم‌ناپذیر، معادلات ناویر-استوکس عبارتند از [۴۲]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (۶)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \right) + \mathbf{F}, \quad (۷)$$

که در آن ρ چگالی موضعی مایع، μ ویسکوزیته موضعی مایع و p فشار ماکروسکوپی است. همچنین، نیروی خارجی است که به سیال وارد می‌شود. در این مطالعه، نیرو از دو قسمت تشکیل شده است:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b, \quad (۸)$$

که در آن \mathbf{F}_b نیروی حجمی و \mathbf{F}_s نیروی کشش سطحی است. ژاکمین [۳۰] رابطه زیر را برای نیروی کشش سطحی پیشنهاد کرد:

$$\mathbf{F}_s = \mu_\phi \nabla \phi, \quad (۹)$$

$$\mu_\phi = 4\beta\phi(\phi-1)(\phi-1/2) - \kappa \nabla^2 \phi.$$

\mathbf{F}_b به صورت زیر است:

$$\mathbf{F}_b = (\rho_H - \rho_L) \mathbf{G}, \quad (۱۰)$$

که در آن \mathbf{G} شتاب گرانش، ρ_H و ρ_L به ترتیب چگالی فاز سنگین تر و سبک تر هستند. توجه داشته باشید که چگالی‌ها و نیروها موضعی هستند.

روش عددی

در اینجا ما از روش شبکه بولتزمن ارایه شده برای میدان فازی بقایی پیشنهاد شده توسط فخاری و همکاران استفاده کردیم [۴۳]. برای حل معادلات تعقیب مرز مشترک و هیدرودینامیک ثابت می‌شود که معادله شبکه بولتزمن زیر می‌تواند معادله (۱) را برای میدان فازی بقایی [۴۴] را بازیابی کند که عبارت است از:

$$h_a(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \Delta t, t + \Delta t) = h_a(\mathbf{x}, t) - \frac{h_a(\mathbf{x}, t) - h_a^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_\phi + 1/2}, \quad (۱۱)$$

که در آن τ_ϕ زمان آرامش فاز مورد نظر، h_a تابع توزیع میدان فاز و e_a مجموعه سرعت ماکروسکوپی است. در این مدل، تابع توزیع تعادل برای میدان فاز عبارت است از:

$$h_a^{eq} = \phi \Gamma_a + w_a \frac{M}{c_s^2} \left[\frac{4}{w} \phi(1-\phi) \right] (\mathbf{e}_a \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (۱۲)$$

که در آن:

$$\Gamma_a = w_a \left[1 + \frac{\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right], \quad (۱۳)$$

و $c_s = c/3$ سرعت صدا، w_a ضرایب وزنی و M تحرک سیستم است که به زمان آرامش به صورت زیر مرتبط می‌شود [۴۳]:

$$M = \tau_\phi c_s^2 \Delta t. \quad (۱۴)$$

معادله (۱۱) در دو مرحله حل می‌شود: برخورد و انتشار. پس از مرحله انتشار، میدان فاز به صورت زیر به روز می‌شود:

$$\phi = \sum_a h_a. \quad (۱۵)$$

چگالی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho = \rho_L + \phi(\rho_H - \rho_L). \quad (۱۶)$$

برای یک جریان چند فازی تقریباً غیرقابل تراکم، معادله شبکه بولتزمن [۴۵] عبارت است از:

$$\bar{g}_a(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \Delta t, t + \Delta t) = \bar{g}_a(\mathbf{x}, t) + \Omega_a(\mathbf{x}, t) + F_a(\mathbf{x}, t), \quad (۱۷)$$

که در آن \bar{g}_a تابع توزیع هیدرودینامیکی است و Ω_a یک عملگر برخورد است. باز هم، این معادله را می‌توان با استفاده از رویکرد جریان-برخورد حل کرد. در معادله (۱۷)، جمله نیرویی است که برابر است با [۳۶]:

$$F_a = \Delta t \left[(\Gamma_a - w_a) (\rho_H - \rho_L) c_s^2 + \Gamma_a \mu_\phi \right] (\mathbf{e}_a - \mathbf{u}) \cdot \Delta \phi + \Delta t \Gamma_a (\mathbf{e}_a - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{F}. \quad (۱۸)$$

با استفاده از مدل زمان آرامش چندگانه برای عملگر برخورد، Ω_a عبارت است از:

$$\Omega_a = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{M} (\bar{g}_a - \bar{g}_a^{eq}), \quad (۱۹)$$

که در آن:

$$\bar{g}_a^{eq} = g_a^{eq} - \frac{F_a}{2}, \quad (۲۰)$$

و

$$g_a^{eq} = p w_a + \rho c_s^2 (\Gamma_a - w_a). \quad (۲۱)$$

که در آن \mathbf{M} یک نگاشت متعامد است که فضای فیزیکی را بر روی فضای منتوم می‌نگارد و $\hat{\mathbf{S}}$ ماتریس قطری آرامش است. پس از حل معادله (۱۷) و با به دست آوردن \bar{g}_a می‌توان خواص هیدرودینامیکی را با استفاده از معادلات زیر محاسبه کرد [۳۶]:

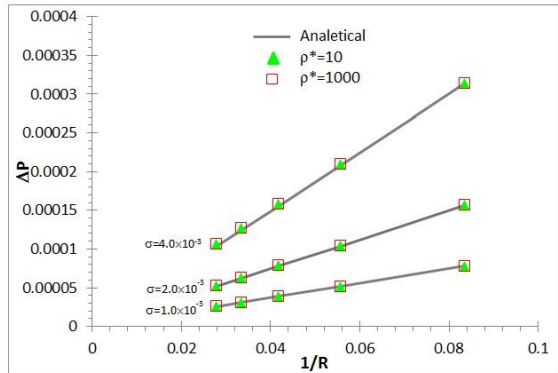
$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho c_s^2} \sum_a \bar{g}_a \mathbf{e}_a + \frac{\Delta t}{2\rho} (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b), \quad (۲۲)$$

$$p = \sum_a \bar{g}_a + \frac{\Delta t}{2} (\rho_H - \rho_L) c_s^2 \mathbf{u} \cdot \Delta \phi. \quad (۲۳)$$

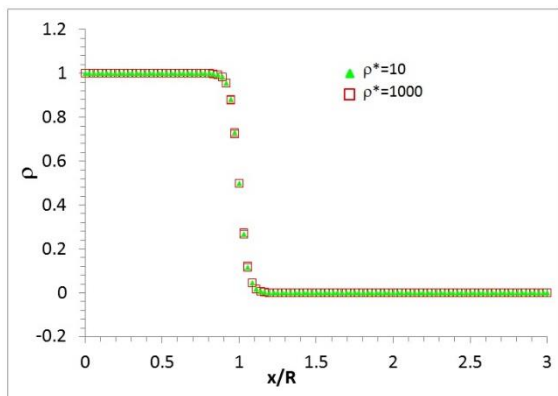
اعداد بدون بعد

اعداد بدون بعد در مکانیک سیالات مجموعه‌ای از کمیت‌های بدون بعد هستند که نقش مهمی در تحلیل رفتار سیالات دارند. این اعداد از تقسیم ۲ کمیت با ابعاد یکسان بر هم به دست می‌آیند. این دو کمیت می‌تواند کمیت‌های مربوط به خصوصیات فیزیکی مسئله مانند سرعت، چگالی، طول، لزجت و غیره باشد و یا از دینامیک مسئله نشئت گرفته باشد که به طور عمومی تقابل بین نیروها نشان می‌دهد. مهمترین اعداد بدون بعد مسائل شامل قطره یا حباب عبارتند از: باند (اوتوس)، کیپلاری، رینولدز، وبر، آنسرج، مورتون، مارانگونی. در مسئله مطرح شده در پژوهش حاضر اعداد

جهت بررسی پروفیل چگالی در طول سطح مشترک قطره می‌توان به شکل ۳ مراجعه نمود. همانطور که، از نمودار مشخص است، در طول ۲۰۰۰۰ تکرار، ضخامت سطح مشترک پیوستگی خود را در حد ۴ الی ۵ شبکه حفظ کرده و دچار پخش نشده است. این عدم پخش شدگی در شبیه سازی جریان دوفاز نیز یکی از موارد تایید عملکرد روش عددی استفاده شده است.



شکل ۲: صحت‌سنجی آزمون لاپلاس



شکل ۳: صحت‌سنجی آزمون لاپلاس

اعتبارسنجی

با توجه به دوبردی بودن شبیه‌سازی حاضر، امکان مقایسه آن با بررسی‌های تجربی وجود ندارد. از طرفی، اکثر بررسی‌های معتبر عددی در این فیزیک مسئله بصورت تقارن محوری انجام شده است. اگرچه بررسی تقارن محوری باعث نزدیک شدن حل عددی به واقعیت فیزیکی می‌شود، با این وجود بررسی عوامل اصلی موثر در شکل‌گیری و جدایش قطره با هزینه محاسباتی کمتری در دوبردی قابل انجام است. در شکل ۴ نتایج حاصل از شبیه‌سازی حاضر با حل عددی مرجع [۴۶] که مسئله جدایش قطره را بصورت جامع با استفاده از روش‌های تجربی و عددی مورد بررسی قرار داده است، مقایسه شده است. با توجه به اینکه بررسی انجام شده در این مرجع تقارن محوری است، در نگاه اول اختلاف زیادی بین نتایج وجود دارد، اما رفتار هر دو نمودار یکسان است. اختلاف پدید آمده

بی بعد مهم عبارتند از: رینولدز، باند (اتووس)، کپیلاری، آنسرج، و بر. این انتخاب این اعداد با استفاده از تئوری پای-باکینگهام و تجارب عددی گذشته انجام می‌شود. البته نسبت‌های چگالی و نسبت لزجت سینماتیکی هم از اعداد بی‌بعد ناشی از فیزیک جریان هستند. مهمترین اعداد بی‌بعد مطرح در فیزیک مطرح شده در این مقاله عبارتند از:

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (24)$$

$$We = \frac{\rho U^2 D}{\sigma} \quad (25)$$

$$Bo(Eo) = \frac{g \Delta \rho D^2}{\sigma} \quad (26)$$

$$Ca = \frac{\rho \nu U}{\sigma} = \frac{\sigma}{Re} \quad (27)$$

$$Oh = \frac{\mu_a}{\sqrt{\rho_a d_a \sigma}} = \frac{\sqrt{We}}{Re} \quad (28)$$

با استفاده تئوری پای-باکینگهام مشخص شده است که ۳ عدد بی‌بعد رینولدز، باند و وبر برای توصیف فیزیک حاضر ضروری است. دو عدد بی‌بعد دیگر که از عملیات ریاضی وبر و رینولدز حاصل می‌شوند و به منظور ارائه نتایج با هدفی خاص از آنها استفاده می‌شود. در فیزیک مسئله حاضر، مطابق با مرجع [۴] گستره عدد رینولدز ۱۰۰۰-۰/۰۱، عدد کپیلاری ۵-۰/۰۰۰۰۱ و عدد باند ۱-۰/۰۱ برای محدوده چکیدن متناوبی تعریف شده است.

تأییدیه و اعتبارسنجی

در توسعه کد شبیه‌سازی عددی جهت اطمینان از بدست آوردن نتایج صحیح باید کد در دو مرحله مورد آزمایش قرار بگیرد. این دو مرحله شامل تأییدیه (و اعتبارسنجی) است. در مرحله تأییدیه باید اصول ابتدایی فیزیکی که به زبان ریاضی و ماشین درآمده است مورد تصدیق قرار بگیرد. در مرحله اعتبارسنجی سعی می‌شود که صحت عملکرد کد شبیه‌سازی ایجاد شده در مسائلی که در آن با چالش روبرو است، تأیید شود.

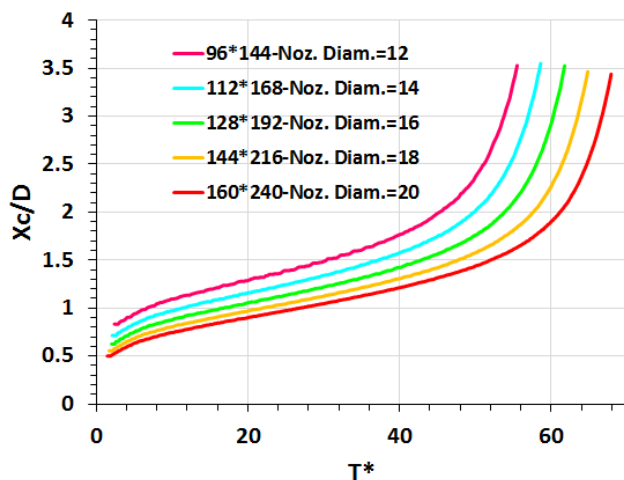
قانون لاپلاس

یکی از مهمترین ویژگی‌های مدل‌های دوفازی، شبیه‌سازی صحیح کشش سطحی می‌باشد. این کار با انجام آزمون لاپلاس انجام می‌شود. این آزمون با بدست آوردن نتایج منطبق رابطه تحلیلی لاپلاس یعنی رابطه بین اختلاف فشار درون و بیرون قطره با نسبت کشش سطحی به شعاع ($\sigma/R = \Delta P$) انجام می‌شود. در شکل ۲ عملکرد کد توسعه داده شده در این مقاله در دو نسبت چگالی ۱۰ و ۱۰۰۰ و برای ۳ کشش سطحی مختلف را نشان می‌دهد که نتایج کاملاً بر حل تحلیلی منطبق است. همچنین،

شبکه، روش به خودی خود جزئیات بیشتری از فیزیک مسئله را بدست می‌آورد و این جزئیات باعث می‌شود که در محل گلوگاه سیال دیرتر جدایش اتفاق بیافتد. این بدان معنی است که برای بررسی استقلال حل از شبکه باید به نیمه اول نمودارها دقت شود که شبکه 144×216 با تعداد شبکه ۱۸ در نازل انتخابی است که می‌تواند نتایج مستقل از شبکه حاصل کند. در صورتی هدف از بررسی مطالعه‌ای ناحیه گلوگاه باشد، با توجه به دقت مدنظر محقق باید شبکه‌های ریزتری انتخاب شود.

جدول ۱: جزئیات بررسی تعداد شبکه

ردیف	تعداد شبکه در جهت y	تعداد شبکه در جهت x	تعداد شبکه دهانه نازل
۱	۹۶	۱۴۴	۱۲
۲	۱۱۲	۱۶۸	۱۴
۳	۱۲۸	۱۹۲	۱۶
۴	۱۴۴	۲۱۶	۱۸
۵	۱۶۰	۲۴۰	۲۰

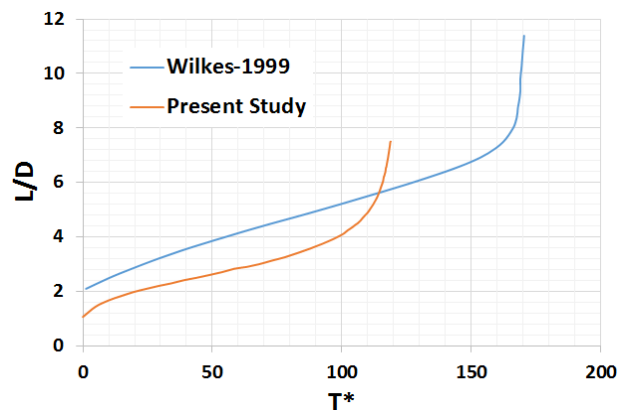


شکل ۵: بررسی استقلال حل از شبکه

نتایج و بحث

با توجه به تعداد زیاد عوامل اثرگذار در هندسه تشکیل و جدایش قطره، در پژوهش حاضر سعی شده است که تأثیرات شبکه انتخابی روی دقت محاسبات و هزینه محاسباتی مطالعه شود. از این رو، مسئله در رینولدز $(6/605)$ و کپیلاری $(5/678 \times 10^{-5})$ و عدد باند $1/52$ در شبکه‌های مختلف بیان شده در جدول ۱ بررسی شده است. در شکل ۶ مقایسه نمودار زمان محاسبات بر حسب تعداد شبکه نشان داده شده است. بطور طبیعی با افزایش تعداد

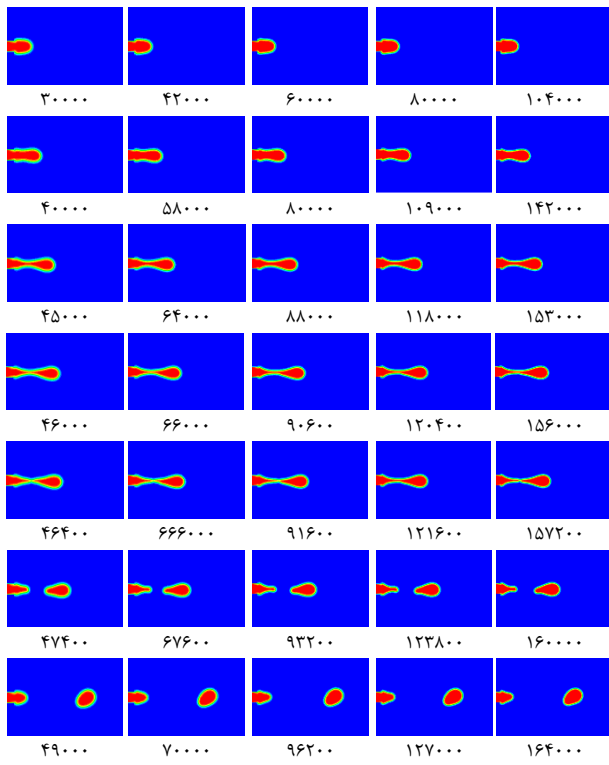
به دلیل دو بعدی بودن شبیه‌سازی حاضر است. در مرجع [۴۶] حل بصورت تقارن محوری انجام شده است که نوعی حل سه بعدی به حساب می‌آید. اضافه شدن یک بعد به مسائل یک درجه آزادی به هندسه اضافه کرده و در واقع جریان از محدودیت دوبعدی در آمده و در نتیجه سرعت کمتری خواهد داشت. این مسئله مانند مسئله کلاسیک اختلاف جریان و سرعت ماکزیمم روی کره و استوانه به حساب می‌آید. برای این‌گونه مسائل در ۳ بعد از اصطلاح «اثر راحت‌شدگی» و برای حالت ۲ بعدی از اصطلاح «محدود شدن جریان» استفاده می‌شود. از این رو، قطره شبیه‌سازی شده در حالت تقارن محوری دیرتر از حالت دوبعدی جدا می‌شود. همانطور که عنوان شد به دلیل روند یکسان دو نمودار می‌توان نتیجه گرفت که کد توسعه یافته در این پژوهش (مدل میدان فازی بقایای شبکه بولتزمن) برای حل مسئله دوبعدی تشکیل و جدایش قطره معتبر است.



شکل ۴: آزمون آرامش قطره غیر دایروی

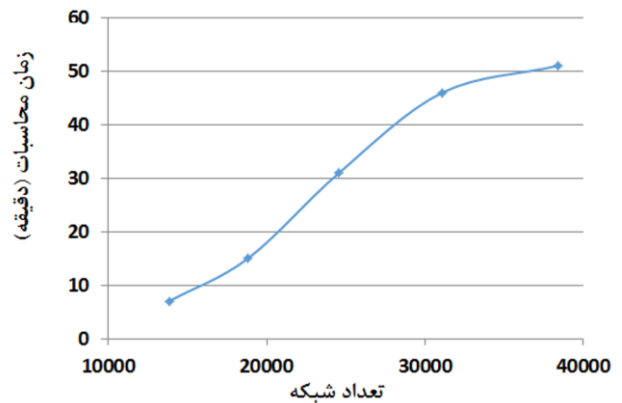
مطالعه شبکه

یکی از ملزومات شبیه‌سازی‌های عددی بررسی استقلال نتایج بدست آمده از اندازه شبکه انتخابی است. در روش شبکه بولتزمن نیز این بررسی بایستی انجام شود. از این رو، در جدول ۱ شبکه‌ها با اندازه مختلف برای شبیه‌سازی مسئله حاضر در نظر گرفته شده است. به تبع تغییر اندازه شبکه، تعداد شبکه در نازل نیز تغییر می‌کند. جهت بررسی ۳ عدد بی‌بعد باند $(0/345)$ ، رینولدز $(6/605)$ و کپیلاری $(5/678 \times 10^{-5})$ ثابت در نظر گرفته شده و اندازه سایر متغیر برحسب تغییر اندازه هندسه تغییر می‌کند. شکل ۵ نتیجه شبیه‌سازی مسئله با تعداد شبکه مختلف را به نمایش گذاشته است. با بررسی شکل ۵ در نگاه اول به نظر می‌رسد که نتایج شبیه‌سازی مسئله مورد بحث در این پژوهش از شبکه‌های انتخابی مستقل نیست. اما باید دقت شود جدایش در تمام شبکه‌ها در یک مکان اتفاق می‌افتد (محور عمودی). یعنی با اضافه کردن تعداد



شکل ۷: تأثیر افزایش شبکه بر جزئیات نتایج بدست آمده

شبکه زمان انجام محاسبات افزایش می‌یابد. نکته قابل توجه در این نمودار این است که میزان افزایش زمان محاسبات با افزایش تعداد شبکه روند نزولی دارد. یعنی در تعداد بالای شبکه، هرچه تعداد شبکه افزایش یابد میزان افزایش زمان محاسبات نسبت به افزایش قبلی کاهش می‌یابد. این نکته می‌تواند برای انتخاب شبکه جهت رسیدن به نتایج با دقت بالاتر مفید باشد و محقق با خیال راحتتری تعداد شبکه بالاتر را انتخاب کند.



شکل ۶: تأثیر تغییر عدد باند بر سرعت تشکیل قطره

همانطور که در بخش مطالعه شبکه توضیح داده شد، با توجه به شکل ۵ جدایش در تمام شبکه‌ها در یک مکان اتفاق می‌افتد. اما با اضافه کردن تعداد شبکه، روش به خودی خود جزئیات بیشتری از فیزیک مسئله را بدست می‌آورد و این جزئیات باعث می‌شود که در محل گلوگاه سیال دیرتر جدایش اتفاق بیفتد. شکل ۷ این جزئیات در مرز مشترک و محل گلوگاه بر حسب تعداد تکرار حل را به نمایش گذاشته است.

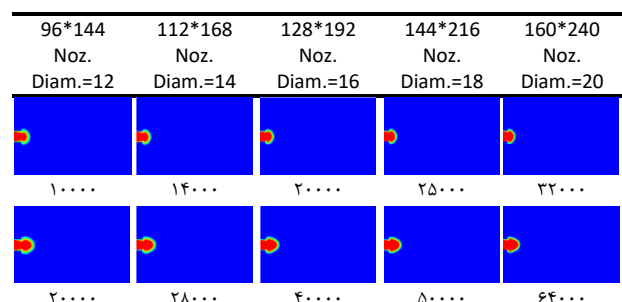
شکل ۷ نشان می‌دهد که با افزایش تعداد شبکه جزئیات محل جدایش در زمان بیشتری اتفاق می‌افتد. همچنین، مرز مشترک بین دو سیال با افزایش تعداد شبکه دقیق‌تر و نازک‌تر خواهد بود. اگرچه شاید این مزیت افزایش تعداد شبکه در مسئله حاضر حائز اهمیت نباشد، اما در مسائلی که هندسه دارای تغییرات بسیار ریزتری مانند تشکیل قطرات اقماری بسیار مهم خواهد بود و برای رسیدن به جواب درست باید از شبکه با تعداد بیشتر استفاده کرد.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

با بررسی انجام شده در این پژوهش می‌توان بیان کرد که مدل میدان فازی بقایی در روش شبکه بولتزمن، روشی مناسب و قابل اعتماد برای شبیه‌سازی مسئله تشکیل و جدایش قطره به حساب می‌آید. جزئیات و هزینه محاسبات تا حدودی به دلخواه و دقت محقق وابسته است. اگر در مسئله‌ای تغییرات کوچک مرز مشترک حائز اهمیت باشد (مانند تشکیل قطرات اقماری)، روش حاضر قابلیت آنرا دارد که با صرف هزینه محاسباتی بیشتر این جزئیات را بدست آورد.

مراجع

- [1] Zhang, D.F. and Stone, H.A., "Drop Formation in Viscous Flows at a Vertical Capillary Tube", *Phys. Fluids*, Vol. 9, No. 8, pp. 2234-2242, 1997.
- [2] Basaran, O.A., "Small-scale Free Surface Flows with Breakup: Drop Formation and Emerging Applications", *AIChE Journal*, Vol. 48, No. 9, pp. 1842-1848, 2002.
- [3] He, B., Yang, S. Qin, Z., Wen, B., and Zhang, C., "The Roles of Wettability and Surface Tension in Droplet Formation during Inkjet Printing", *Scientific Reports*, 7, pp.1-7, 2017.
- [4] Zhang, X. and Basaran, O.A., "An Experimental Study of Dynamics of Drop Formation", *Phys. Fluids*, Vol. 7, No. 6, pp. 1184-1203, 1995.
- [5] Raje, P.V. and Murmu, N.C., "A Review on Electrohydrodynamic-inkjet Printing Technology",



- Formation of Drop-on-demand Inkjet Printing”, International Conference on Energy, Materials and Manufacturing Engineering (EMME 2015), Kuala Lumpur, Malaysia, October 15-16, 2015.
- [23] Chakraborty, I., Rubio-Rubio, M., Sevilla, A., and Gordillo, J.M., “Numerical Simulation of Axisymmetric Drop Formation Using a Coupled Level Set and Volume of Fluid Method”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 84, pp. 54-65, 2016.
- [24] Fallah, K. and Taeibi-Rahni, M., “Lattice Boltzmann Simulation of Drop Formation in T-junction Microchannel”, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 204, pp. 723-732, 2017.
- [25] Fallah, K. and Taeibi-Rahni, M., “Numerical Simulation of Drop Formation in a Microchannel, Using Lattice Boltzmann Method”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 10, pp. 94-102, 2017 (In Persian).
- [26] Fallah, K., Taeibi-Rahni, M., Mohammadzadeh, A., and Najafi, M., “Drop Formation in Cross-junction Microchannel, Using Lattice Boltzmann Method”, *Thermal Science*, Vol. 22, No. 2, pp. 909-919, 2018.
- [27] Nazari, A. and Nazari, A., “Experimental Investigation on Newtonian Drop Formation in Different Continuous Phase Fluids”, ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE2018), November 9-15, Pittsburgh, PA, USA, 2018.
- [28] Lu, S., Cao, G., Zheng, H., Li, D., Shi, M., and Qi, J., “Simulation and Experiment on Droplet Formation and Separation for Needle-Type Micro-Liquid Jetting Dispenser”, *Micromachines*, Vol. 9, No. 7, pp. 1-14, 2018.
- [29] Bishnoi, P. and Sinha, M.K., “Computational Investigation of Various Transition Stages in the Drop Formation Process”, Book Chapter, Published in: *Advances in Interdisciplinary Engineering*, Singapore, Springer, 2019.
- [30] Sen, N., Singh, K.K., Mukhopadhyay, S., and Shenoy, K.T., “Drop Formation at a Hole in a Plate Submerged in Quiescent Continuous Phase: Comparison of Plain Hole and Nozzle Hole”, *Chemical Engineering Communications*, Vol. 206, No. 10, pp. 1-19, 2019.
- [31] Ghorbanifar, Sh., “Numerical Simulation of Non-linear Oscillations of a Pendent Drop from a Capillary Tip during Formation and Detachment”, Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Science and Research Branch, 2020.
- [32] Ghorbanifar, Sh., Taeibi-Rahni, M., and Zareh, M., “Innovations in Non-linear Oscillations of a Pendent Drop from a Capillary Tip during Formation and Detachment - An LBM Simulation”, *Journal of Applied Fluid Mechanics (JAFM)*, In Progress, 2020.
- [33] Fakhari, A. and Lee, T., “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for immiscible fluids at high Reynolds numbers”, *Phys. Rev. E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys.*, Vol. 87, pp. 023304, 2013.
- [34] Geier, M., Fakhari, A., and Lee, T., “Conservative phase-field lattice Boltzmann model for interface tracking equation”, *Phys. Rev. E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys.*, Vol. 91, 2015.
- [35] Fakhari A., Geier M., and Lee T., “A mass-conserving lattice Boltzmann method with dynamic grid refinement for immiscible two-phase flows”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 315, pp. 434-57, 2016.
- [36] Fakhari A., “Bolster D. Diffuse interface modeling of three-phase contact line dynamics on curved boundaries: A lattice Boltzmann model for large density and viscosity ratios”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 334, pp. 620-38, 2017.
- International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, Vol. 4, No. 5, pp.174-183, 2014.
- [6] Vaezi, M., Seitz, H., and Yang, S., “A Review on 3D Micro-additive Manufacturing Technologies”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 6, No. 7, pp. 1721-1754, 2013.
- [7] Wang, T., Cook, C.C., Serban, S., Ali, T., Drago, G., and Derby, B., “Fabrication of Glucose Biosensors by Inkjet Printing”, *arXiv:1207.1190*, pp. 1-21, 2012.
- [8] Sumerel, J., Lewis, J., Doraiswamy, A., Deravi, L.F., Sewell, S.L., Gerdon, A.E., Wright, D.W., and Narayan, R.J., “Piezoelectric Ink Jet Processing of Materials for Medical and Biological Applications”, *Biotechnology Journal*, 1, pp. 976-987, 2006.
- [9] Wickström, H., Palo, M., Rijckaert, K., Kolakovic, R., Nyman, J.O., Määttänen, A., Ihalainen, P., Peltonen, J., Genina, N., de Beer, T., Löbmann, K., Rades, T., and Sandler, N., “Improvement of Dissolution Rate of Indomethacin by Inkjet Printing”, *European Journal of Pharmaceutical Sciences*, Vol. 75, pp. 91-100, 2015.
- [10] Hayworth, C.B. and Treybal, R.E., “Drop Formation in Two-Liquid-Phase Systems”, *Ind. Eng. Chem.*, Vol. 42, No. 6, pp. 1174-1181, 1950.
- [11] Fraser, R.P., Eisenklam, P., Dombrowski, N., and Hasson, D., “Drop Formation from Rapidly Moving Liquid Sheets”, *AIChE Journal*, Vol. 8, No. 5, pp. 672 - 680, 1962.
- [12] Manfré, G., “Rheological Aspects of Drop Formation”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 37, No. 5, pp. 1955-1962, 1966.
- [13] Lee, H.C., “Drop Formation in a Liquid Jet”, *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 18, No. 4, pp. 364-369, 1974.
- [14] Bogy, D.B., “Drop Formation in a Circular Liquid Jet”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 11, pp. 207-228, 1979.
- [15] Shield, T.W. Bogy, D.B., and Taike, F.E., “Drop Formation by DOD Ink-jet Nozzles: A Comparison of Experiment and Numerical Simulation”, *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 31, No. 1, pp. 96-110, 1987.
- [16] Stone, H.A., “Dynamics of Drop Deformation and Breakup in Time-Dependent Flows at Low Reynolds Numbers”, Ph.D. Dissertation, Department of California Institute of Technology, 1988.
- [17] Eggers, J. and Dupont, T.F., “Drop Formation in a One-dimensional Approximation of the Navier-Stokes Equation”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 262, pp. 205-221, 1994.
- [18] Fawehinmi, O., Gaskell, P., Jimack, P.K., Kapur, N., and Thompson, H.M., “A Combined Experimental and Computational Fluid Dynamics Analysis of the Dynamics of Drop Formation”, *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 219, No. 9, pp. 933-947, 2015.
- [19] Chang, B., Nave, G., and Jung, S., “Drop Formation from a Wetttable Nozzle”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 5, pp. 2045-2051, 2012.
- [20] Driessen, T., “Drop Formation from Axi-symmetric Fluid Jets”, Ph.D. Dissertation, *Group of Physics of Fluids, University of Twente*, Enschede, Netherlands, 2013.
- [21] Lan, W., Li, S., Wang, Y., and Luo, G., “CFD Simulation of Droplet Formation in Microchannels by a Modified Level Set Method”, *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 53, No. 12, pp. 4913-4921, 2014.
- [22] Zhang, L., Zhu, Y., Cheng, X., and Wang, C., “The Simulation Study of Fluid Physical Properties on Drop

- [42] Clift, R., Grace, J.R., and Weber ME., *Bubbles, Drops, and Particles*, New York: Academic Press, 1978.
- [43] Mitchell, T., Leonardi, C., and Fakhari, A., "Development of a three-dimensional phase-field lattice Boltzmann method for the study of immiscible fluids at high density ratios", *Int. J. Multiph. Flow*, Vol.107, pp. 1–15, 2018.
- [44] Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., and Viggen, E.M., *The Lattice Boltzmann Method*. 1st ed. Cham, Springer International Publishing, 2017.
- [45] Fakhari, A., Mitchell, T., Leonardi C., and Bolster D., "Improved locality of the phase-field Lattice-Boltzmann model for immiscible fluids at high density ratios", *Phys. Rev. E*, Vol. 96, 2017.
- [46] Wilkes, E.D., Phillips, S.D., and Basarana, O.A., "Computational and experimental analysis of dynamics of drop formation", *Physics of Fluids*, Vol. 11, No. 12, pp. 3577-3598, 1999.
- [37] Cahn, J.E. and Hilliard, J.W., "Free Energy of a Nonuniform System. II. Interfacial Free Energy Thermodynamic Basis", *J. Chem. Phys.*, Vol. 28, pp. 258–67., 1958.
- [38] Allen, S.M. and Cahn, J.W., "A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening", *Acta Metall*, 27, pp. 1085–95, 1979.
- [39] Chiu, P-H. and Lin, Y-T., "A conservative phase field method for solving incompressible two-phase flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 230, pp. 185–204, 2011.
- [40] Lee, T., "Effects of incompressibility on the elimination of parasitic currents in the lattice Boltzmann equation method for binary fluids", *Comput. Math. With Appl.*, Vol. 58, pp. 987–94, 2009.
- [41] Jacqmin, D., "Calculation of Two-Phase Navier–Stokes Flows Using Phase-Field Modeling", *J. Comput. Phys.*, Vol. 155, pp. 96–127, 1999.